Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XV-a

Galaţi, 25 octombrie 2014

Clasa aXI-a

Problema 1.

Fie $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a)Calculaţi A^n şi arătaţi că mulţimea $\left\{A^n / n \in \mathbb{N}\right\}$ are orice două elemente distincte.

b)Rezolvaţi în mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^n = A$.

Problema 2.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere naturale nenule.

Să se arate că:

a)Şirul $(x_n)_{n\geq 1}, x_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $\forall n \geq 1$ este convergent iar limita este un număr iraţional.

b)Nu există două funcţii polinomiale f şi g astfel încât $x_n = \frac{f(n)}{g(n)}, \forall n \geq 1$.

Problema 3.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pentru care există un număr real c cu $0 \leq a_i \leq c$ pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|a_i - a_j| > \frac{1}{i+j}$ pentru orice i şi j cu $i \neq j$.Arătaţi că $c \geq 1$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.

Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.

Timp de lucru : 2 ore si 30 min.